SUL TEOREMA DEL CONTE DI FAGNANO NOTA DI F. SIACCI

Francesco Siacci

SUL TEOREMA

DEL CONTE DI FAGNANO

NOTA

F. SIACCI

SUL TEOREMA

DEL CONTE DI FAGNANO

NOTA

DI

F. SIACCI

ESTRATTO DAL BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
TOMO III — GENNAIO 1870

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata Num° 211 A
1870

SUL TEOREMA
DEL CONTE DI FAGNANO

È ben noto come l'integrale dell'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=0$$

costituisce il teorema fondamentale della teorica delle funzioni circolari. È noto altresì che l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}+\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}=0,$$

dove φ è una funzione algebrica di quarto grado, costituisce il teorema analogo fondamentale della teorica dei trascendenti ellittici. La proprietà singolare di ciascuna di tali equazioni consiste in ciò, che il loro integrale è algebrico, mentre l'integrale di ciascuno dei termini che le compongono è trascendente. L'analogia, anzi la stretta relazione che passa fra tale proprietà, ed il famoso *Teorema del Conte di Fagnano*, che cioè si possano sopra un'ellisse e sopra un'iperbole assegnare infinite coppie d'archi la cui differenza sia rettificabile, ed un gentile invito di D. B. Boncompagni mi hanno indotto a ricercare 1° in qual modo questo teorema fu enunciato e dimostrato dal Conte di Fagnano, 2° in qual tempo preciso egli lo pubblicò, 3° qual posto tenga questo Teorema nella successione storica dei vari lavori pubblicati intorno a quel tempo circa gl'integrali ellittici, 4° le varie forme sotto le quali lo presentano i diversi autori.

I risultamenti di queste ricerche sono esposti qui appresso.

§ 1 — *Enunciato e dimostrazione che si danno dal Conte di Fagnano del suo Teorema*

Questo teorema fu dato per la prima volta da Giulio Carlo Conte di Fagnano, in un suo scritto stampato nel 1718 (*)

Eccone l'enunciato testuale (**):

« *Teorema*

» Se due Polinomj indeterminati X » e Z, e nell'equazione (I) le » lettere h, l, f, g rappresentino qual» sivoglia quantità costante

» Io dico in primo luogo, che se nell' » equazione (I) l'esponente n significa » l'unità positiva, l'integrale dell'ag» gregato de' due Polinomj X + Z è » uguale a $\frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$

» Io dico in secondo luogo, che se » nella medesima equazione (I) l'es» ponente n esprime l'unità negativa, » allora l'integrale dell'aggregato » X + Z è uguale a $\frac{xz}{\sqrt{g}}\sqrt{-h}$

» (X) $\quad \frac{dx\sqrt{hxx+l}}{\sqrt{fxx+g}}$

» (Z) $\quad \frac{dz\sqrt{hzz+l}}{\sqrt{fzz+g}}$

» (I) $\overline{fhxxzz}^n + \overline{flxx}^n + \overline{flzz}^n + gl = 0$ »

La dimostrazione data dal conte di Fagnano della prima parte di questo Teorema (***) riducesi a quanto segue:

L'equazione

$$(1) \qquad \overline{fhx^2z^2}^n + \overline{flx^2}^n + \overline{flz^2}^n + gl = 0$$

nel caso di $n = 1$ diviene

$$(2) \qquad fhx^2z^2 + flx^2 + flz^2 + gl = 0$$

Da quest'ultima traendosi

$$(3) \qquad \begin{cases} z = \sqrt{\dfrac{-flx^2 - gl}{fhx^2 + fl}} \\ x = \sqrt{\dfrac{-flz^2 - gl}{fhz^2 + fl}} \end{cases}$$

(*) Questo scritto è inserito nel volume intitolato « GIORNALE | DE' LETTERATI | D'ITALIA | TOMO VENTESIMONONO | ANNO MDCCXVIII. | SOTTO LA PROTEZIONE | DEL SERENISSIMO PRINCIPE | FERDINANDO | GRAN PRINCIPE DI TOSCANA | IN VENEZIA MDCCXVIII | Appresso Gio. Gabbriello Ertz. | Con licenza de' Superiori | E Con Privilegio Anche | Di N. S. Papa Clemente XI » (pag. 266, lin. 21—26; pag. 267—270). In questo volume lo scritto medesimo ha il titolo seguente (pag. 267, lin. 18—20): « ARTICOLO XI | Teorema da cui si deduce una nuova misura degli Archi Ellittici, Iperbolici e Cicloidali. | Del Sig. Giulio Carlo Conte di Fagnano ». Lo scritto stesso fu anche ristampato nel volume intitolato « PRODUZIONI | MATEMATICHE | DEL CONTE GIULIO CARLO | DI FAGNANO, | MARCHESE DE' TOSCHI | E DI SANT'ONORIO | NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGALLIESE | ALLA SANTITÀ DI N. S. | BENEDETTO XIV | PONTEFICE MASSIMO. | TOMO SECONDO. | IN PESARO | L'ANNO DEL GIUBILEO MDCCL. | NELLA STAMPERIA GAVELLIANA | CON LICENZA DE' SUPERIORI » (pag. 336, lin. 5—21; pag. 337—342). Nel medesimo volume (pag. 336, lin. 1—4), questo scritto ha il titolo seguente: « TEOREMA Da cui si deduce una nuova misura | Degli Archi Ellittici, Iperbolici, e Cicloidali ».

(**) GIORNALE | DE' LETTERATI, ecc. TOMO VENTESIMONONO, ecc. pag. 266, lin. 21—26; pag. 267. — PRODUZIONI | MATEMATICHE, ecc. TOMO SECONDO, ecc. pag. 336, lin. 5—15.

(***) GIORNALE | DE' LETTERATI, ecc. TOMO VENTESIMONONO, ecc. pag. 268, lin. 3—16; pag. 269, lin. 1—7. — PRODUZIONI | MATEMATICHE, ecc. TOMO SECONDO, ecc. pag. 336, lin. 20—21; pag. 337, lin. 1—14.

ed essendo per ipotesi (*)

$$X = \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}} \quad , \qquad Z = \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}} \; ,$$

si avrà

$$X = \frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}} \quad , \qquad Z = \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}} \; ,$$

e quindi

$$X + Z = \left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right)\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}$$

Differenziando la (2), e dividendola per $2fxz$ si ha

$$l\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) + h(zdx + xdz) = 0$$

Dividendo quest'ultima per $\sqrt{-fl}$ e trasportando il secondo binomio si ottiene

$$\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right)\sqrt{\frac{-l}{f}} = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}\, d.\, xz, \quad (^{**})$$

e però

$$(4) \qquad \int X + \int Z = \frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$$

La seconda parte del teorema suddetto è dimostrata dal Conte di Fagnano nel modo seguente (***). Se $s = -1$, traendosi dalla (1)

$$(5) \qquad \begin{cases} z = \dfrac{\sqrt{-ghx^2 - gl}}{\sqrt{fhx^2 + gh}} \\[2ex] x = \dfrac{\sqrt{-ghz^2 - gl}}{\sqrt{fhz^2 + gh}} \end{cases}$$

si avrà

$$X = \frac{zdx\sqrt{-h}}{\sqrt{g}} \quad , \qquad Z = \frac{xdz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}} \; ,$$

(*) Vedi sopra, pag. 2, col. 2ª, lin. 2—4

(**) Veramente anche il primo membro di questa equazione dovrebbe portare il segno —, giacchè dividendo l per $\sqrt{-fl}$ si ha per quoziente $-\sqrt{\frac{-l}{f}}$. Tuttavia l'equazione medesima può essere considerata esatta, attesa l'ambiguità del segno lasciata nel radicale delle formole (3)

(***) GIORNALE DE' LETTERATI, ecc. TOMO VENTESIMOSESTO ecc., pag. 269 lin. 11—15; pag. 270, lin. 1—7 — PRODUZIONI MATEMATICHE, ecc. TOMO SECONDO ecc., pag. 337 lin. 18—27

e però

$$X + Z = (zdx + xdz)\sqrt{-\frac{h}{g}}$$

quindi

$$(6)\qquad \int X + \int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

Le formole (4), (5) sono applicate dal Conte di Fagnano all'ellisse, ed alla iperbola nel modo qui appresso indicato:

Sia un'ellisse AHIG di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

il differenziale di un suo arco qualunque sarà espresso da

$$dx\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}},$$

cioè, ponendo col Conte di Fagnano (¹), $a^2 - b^2 = \frac{ah}{2}$, da

$$dx\sqrt{\frac{hx^2 - 2a^3}{2a^3 - 2ax^2}},$$

espressione identica alla X, ove in questa si ponga $l = 2a^3$, $f = -2a$, $g = 2a^2$



Per conseguenza, se nell'ellisse data si prendano due ascisse $CD = x$, $CE = z$, tali da verificare la (1), $\int X$ sarà rappresentato dall'arco AB ed $\int Z$ dall'arco AF, e però

$$(7)\qquad \text{Arc AB} + \text{Arc AF} = \frac{-hxz}{2a^2} + K$$

La costante K si determina osservando che per $x = 0$ si ha $z = a$, e quindi Arc AB = 0, Arc AF = Arc AG = K, e per conseguenza

$$(8)\qquad \text{Arc AB} - \text{Arc GF} = -\frac{hxz}{2a^2}$$



Similmente per un'iperbola ABF di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

posto $a^2 + b^2 = \frac{ah}{2}$, $CD = x$, $CE = z$, si ha

$$(9)\qquad \text{Arc AB} + \text{Arc AF} = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K$$

(¹) Giornale de' Letterati, ecc. Tomo ventesimosesto, ecc., pag. 270, lin. 17 — Produzioni matematiche, ecc. Tomo secondo ecc., pag. 338 lin. 7

Digitized by Google

Per eliminare la costante K, il Conte di Fagnano prende due altre ascisse Cd, Ce, legate fra loro, come lo sono x e z, e per queste nuove ascisse, dovendo verificarsi la relazione

$$(10)\qquad \text{Arc } Ab - \text{Arc } Af = \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2n}} + K ,$$

così sottraendo questa equazione dalla precedente si trova

$$(11)\qquad \text{Arc } Ff - \text{Arc } Bb = xz\,\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2n}} - tu\,\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2n}} \qquad (*)$$

Si può qui osservare che se nell'applicazione all'ellisse, avesse il Conte di Fagnano come per l'iperbola ha fatto, eliminato la costante K, in vece di determinarla, sarebbe forse giunto ad un teorema che in certa guisa, poteva essere riguardato come più generale. S'ei non l'ha fatto, ciò è probabilmente da attribuirsi alla maggior semplicità, colla quale egli ha forse creduto per tal guisa, e senza mancare alla sua generalità, poter presentare il suo teorema.

Quindi io credo che servendo in un solo teorema, i due contenuti nelle applicazioni esposte di sopra, questo possa essere enunciato *generalmente* così: *Dato un arco qualunque d'un'ellisse o d'un'iperbola, si può sulla stessa ellisse o sulla stessa iperbola assegnare un altro arco che differisca dal primo d'una quantità algebrica.*

Lo scritto del Conte di Fagnano citato di sopra contiene un paragrafo intitolato (**) « *Applicazione della prima parte del* [illegible] *Teorema alle Cicloidi* ». In questo paragrafo egli applica la prima parte del precitato suo teorema alle epicicloidi ed alle epicicloidi generate dal movimento di un punto girante sul piano d'un cerchio che ruoti sulla circonferenza di un cerchio fisso, dentro o fuori di questo. Riducendo il differenziale di un arco di tali curve alla forma X, e ripetendo sempre lo stesso ragionamento, egli trova per queste un teorema analogo ai precedenti (***).

Il detto scritto del Conte di Fagnano termine con un teorema da lui enunciato così (****)

« Segno come sopra i due Polinomj » $z = \frac{1}{a}\frac{\sqrt{g^l}}{\sqrt{fh}}$! Integrale di X + Z sa-

« X + Z, io dico che se si prenderà » rà $\frac{1}{l}\sqrt{lxz+g}\,\sqrt{h+\frac{l}{xz}}$ ».

(*) La formola (4), la prima delle (5) e la (6), (7), (8), (9), (10), (11) sono date dal Conte di Fagnano nel precitato suo scritto (GIORNALE DE' LETTERATI ecc. *TOMO VENTESIMOSESTO* ecc. pag. 269 lin. 7, 14 pag. 270 lin. 1 pag. 271 lin. 12 pag. 272 lin. 7 pag. 273 lin. 8 16 pag. 274 lin. 4 — PRODUZIONI MATEMATICHE ecc. TOMO SECONDO ecc. pag. 33? lin. 14, 26 pag. 338 lin. 16 24 pag. 339 lin. 11 11 20). La prima tre e la sesta di queste altre formole sono enumerate nello scritto medesimo (4), (5), (6), (7), e le altre non hanno numeri.

(**) GIORNALE DE' LETTERATI ecc. *TOMO VENTESIMOSESTO* ecc. pag. 154 lin. 8—9 — PRODUZIONI MATEMATICHE ecc. TOMO SECONDO ecc. pag. 337 lin. 22—23.

(***) GIORNALE DE' LETTERATI ecc. *TOMO VENTESIMOSESTO* ecc., pag. 274 lin. 10—24 pag. 275—276 pag. 277 lin. 1—5 — PRODUZIONI MATEMATICHE ecc. TOMO SECONDO, ecc. pag. 338 lin. 24—28 pag. 340 lin. 10—15.

(****) GIORNALE DE' LETTERATI ecc. *TOMO VENTESIMOSESTO*, ecc. pag. 277 lin. 14—16 pag. 278 lin. 1 — PRODUZIONI MATEMATICHE ecc. TOMO SECONDO ecc. pag. 341 lin. 12—15.

Questo teorema è dimostrato quindi per verifica (*) ed applicato all'iperbole in modo analogo a quello col quale egli ha dimostrato ed applicato i precedenti (**).

Il *Teorema* del Conte di Fagnano quale risulta dal suo scritto sopraccitato, è adunque più generale assai di quello, che sotto tale denominazione vien dato comunemente dagli autori, i quali sogliono limitarlo alla sola ellisse. Questo teorema in fatti è più analitico che geometrico, e non si applica alla sola ellisse, ma all'iperbola, ed alle cicloidi, e ciò è stato fatto dallo stesso Conte di Fagnano, ma a tutte le curve, i cui archi riduconsi alla forma fX, ovvero, come direbbesi con Adriano Maria Legendre, agli integrali ellittici di seconda specie.

La data poi del teorema stesso è quella del volume in cui venne la prima volta in luce cioè 1716.

§ II. — *A che possa ridursi, dal punto di vista analitico, il teorema del Conte di Fagnano*

Dal punto di vista analitico questo teorema riducesi a dedurre dalle tre equazioni finite

$$(12)\quad \begin{cases} fhx^2z^2 + fl(x^2+z^2) + gl = 0 \\ fhx^2z^2 + gh(x^2+z^2) + gl = 0 \\ xz = \sqrt{\dfrac{gl}{fh}} \end{cases}$$

le tre equazioni differenziali

$$(13)\quad \begin{cases} X + Z = -\dfrac{h\,\mathrm{d}\,xz}{\sqrt{-fl}} \\ X + Z = \mathrm{d}\,xz\sqrt{-\dfrac{h}{g}} \\ X + Z = \dfrac{1}{f}\,\mathrm{d}\left[\sqrt{fx^2+g}\sqrt{h+\dfrac{l}{x^2}}\right] \end{cases}$$

cioè alla scoperta che l'equazioni (12) sono altrettanti particolari integrali delle (13). Dico particolari, perchè le (12) non contengono costanti arbitrarie (***).

(*) GIORNALE DE' LETTERATI, ecc. TOMO VENTESIMOSESTO, ecc. pag. 270, lin. 2—20. — PRODUZIONI MATEMATICHE ecc. TOMO SECONDO ecc. pag. 341, lin. 17—22.

(**) GIORNALE DE' LETTERATI, ecc. TOMO VENTESIMOSESTO ecc. pag. 258, lin. 11—16, pag. 279. — PRODUZIONI MATEMATICHE ecc. TOMO SECONDO, ecc. pag. 341, lin. 24—26, pag. 342.

(***) È difficile forse impossibile sapere con certezza qual via abbia seguito il Conte di Fagnano per trovare le tre relazioni (12) che rendono integrabile il binomio X + Z. È per altro assai probabile ch'egli abbia proceduto così: scorse la relazione cercata deva essere simmetrica, cioè tale che x sia data per z come z per x; così è evidente che ponendo

$$\sqrt{\frac{fx^2+g}{hx^2+l}} = f(x, z)$$

§ III – *Qual era l'equazione da integrare per la generalizzazione del medesimo teorema*

È ben facile ora giovandosi opportunamente delle (12) ridurre le tre equazioni differenziali ad una sola, cioè alla

$$\text{(14)} \qquad \frac{dx}{\sqrt{(fx^2+g)(hx^2-l)}} + \frac{dz}{\sqrt{(fz^2+g)(hz^2-l)}} = 0,$$

ma, dico, che è noto il risultamento a cui si deve giungere. Tale per altro non era la condizione del Conte di Fagnano, giacchè se egli avesse effettuata questa riduzione avrebbe scoperto che essendo le (12) integrali particolari della (14), la vera sorgente di questi e di simili teoremi geometrici, da lui trovati, dipendeva dall'integrale che è algebrico, della stessa (14). L'integrale completo della quale avrebbe portata la risoluzione del problema: *Dato un arco d'ellisse o d'iperbola, assegnare sull'una o sull'altra* di queste due curve a partire da un punto dato un *secondo arco, che differisca dal primo d'una quantità algebrica*, ovvero: *Dato un arco d'ellisse o d'iperbola, assegnare sull'una o sull'altra un altro arco che differisca dal primo* di una quantità data, ecc. ecc., problemi che per essere risoluti han bisogno di una costante arbitraria.

Tutto ciò era riserbato al celebre Leonardo Euler.

È da notare che il conte di Fagnano occupossi non solamente della (14) ma anche di una equazione più generale di questa, e ne trovò un integrale particolare, che comprende i tre già notati.

---

ne discende

$$\sqrt{\frac{fx^2+g}{hx^2+l}} = f(a, x)$$

e il binomio $X + Z$ diviene

$$dx\, f(x, z) + dz\, f(z, x)$$

A rendere per tal integrabile quel binomio era avvia porre $f(z, x) = \alpha a$, giacchè si ottiene immediatamente $fX + fZ = \alpha xa$, e la quantità α determinata colla condizione della simmetria dà $\sqrt{\frac{-h}{g}}$ che corrisponde alla seconda delle (1).

Ponendo poi $\qquad f(z, x) = \dfrac{\beta x}{\sqrt{\alpha + \beta(x^2+y^2)}}$

si ottiene

$$fX + fZ = \alpha + \sqrt{\beta(x^2+z^2)}$$

e fatta la determinazione di α e β colla condizione della simmetria, la relazione supposta diviene identica alla prima delle (12).

Ponendo finalmente $\qquad f(z, x) = \dfrac{\alpha z\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{hx^2+l}}$

si ha

$$fX + fZ = \frac{\alpha}{h}\sqrt{hz^2+l}\,\sqrt{hx^2+l}$$

e determinato α colla solita condizione la predetta relazione diviene identica alla terza delle (2).

In altro scritto pubblicato nel 1718, egli avea esposto un nuovo metodo di rettificare la differenza di due archi (uno de' quali è dato) in infinite specie di parabole irrettificabili (*). Per mezzo d'ingegnosi artifici egli riduce questo problema all'integrazione d'una di queste equazioni

$$\frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{x^m+1}} + \frac{z^{cm}\,dz}{\sqrt{z^m+1}} = 0\,, \quad x^{cm}\,dx\sqrt{x^m+1} + z^{cm}\,dz\sqrt{x^m+1} = 0\,,$$

nella quale c, m sono quantità qualunque, facendo dipendere l'integrazione di queste equazioni, come caso particolare, da quella di

(16) $$\frac{x^{n-1}\,dx(x^n+p)^{m-1}}{[(x^n+p)^2+q(x^n+p)+r]^m} + \frac{z^{n-1}\,dz(z^n+p)^{m-1}}{[(z^n+p)^2+q(z^n+p)+r]^m} = 0\,;$$

della quale egli dà il seguente integrale particolare

$$z^n = \frac{r-px^n-p^2}{x^n+p} \quad (**),$$

cioè

(18) $$x^n z^n + p(x^n+z^n) = r - p^2\,.$$

Vediamo ora come questa equazione differenziale è legata alla (14), e come l'integrale particolare (18) comprenda i tre integrali particolari (12).

Se pongasi

$$n=2\,,\quad m=\tfrac{1}{2}\,,\quad p^2+pq+r=0\,,\quad p=\frac{l}{h}\,,\quad 2p+q=\frac{g}{f}$$

la (16) diviene la (14)

(14) $$\frac{dx}{\sqrt{(hx^2+l)(fx^2+g)}} + \frac{dz}{\sqrt{(hz^2+l)(fz^2+g)}} = 0\,,$$

e l'integrale (18) coincide colla prima delle (12).

(*) Questo scritto trovasi nel volume intitolato « GIORNALE | DE' LETTERATI | D'ITALIA | TOMO | VENTESIMOSECONDO | ANNO MDCCXV | SOTTO LA PROTEZIONE | DEL SERENISSIMO | GIO. GASTONE | PRENCIPE DI TOSCANA | IN VENEZIA MDCCXV | Appresso Gio. Gabbriello Ertz | Con Licenza de' Superiori, | E Con Privilegio Anche Di N. S. | Papa Clemente XI (pag. 229, lin. 24—27, pag. 230—231, pag. 232, lin. 1—12). In questo volume (pag. 229, lin. 18—23) lo stesso scritto ha il titolo seguente: « ARTICOLO XII | Nuovo Metodo per rettificare la differenza di due » Archi (uno de quali è dato) in infinite specie di Parabole irrettificabili con la Soluzione del » Problema proposto nel XIX tomo di questo Giornale, pag. 438, del Sig. Giulio Carlo de' Fa- » gnani ». Lo scritto medesimo trovasi ristampato nel predetto volume intitolato « PRODUZIONI MA- » TEMATICHE, ecc. TOMO SECONDO », ecc. (pag. 317, lin. 2—23, pag. 318—330), ed ha nel volume stesso (pag. 317, lin. 1—8) il titolo seguente: « NUOVO METODO | Per rettificare la differenza di due » archi (uno de' quali è dato) in infinite specie | DI PARABOLE IRRETTIFICABILI | Colla soluzione del » problema proposto nel XIX tomo | del giornale de' letterati d'Italia, e colla maniera | di tagliare » per metà il quadrante | DELLA CURVA LEMNISCATA ». È da notare che nella linea ultima della medesima pagina 317 trovasi stampato per errore « tomo XX » in vece del « tomo XXII » del predetto GIORNALE DE' LETTERATI D'ITALIA.

(**) GIORNALE | DE' LETTERATI | D'ITALIA | TOMO VENTESIMOSECONDO | ANNO MDCCXV, ecc., pag. 240, lin. 9—25, pag. 241, pag. 242, lin. 1—11. — PRODUZIONI | MATEMATICHE, ecc. TOMO SECONDO, ecc., pag. 321, lin. 16—28, pag. 322, lin. 1—9.

Digitized by Google

Se poi si pone

$$n=0\,,\quad m=\tfrac{1}{2}\,,\quad p^2+pq+r=0\,,\quad p=\frac{g}{f}\,,\quad 2p+q=-\frac{l}{h}$$

la (15) si trasforma nella (14), e la (16) nella seconda delle (12)

Se finalmente si fa

$$n=0\,,\quad m=\tfrac{1}{2}\,,\quad p=0\,,\quad q=-\left(\frac{l}{h}+\frac{g}{f}\right),\quad r=\frac{lg}{fh}$$

si ottiene sempre la (14), e la (16) si trasforma nella terza delle (18).

Da tutto ciò si deduce che il Conte di Fagnano, anche prima di occuparsi del teorema che porta il suo nome, si occupò dell'integrazione della (15), ed implicitamente anche della (14), che ne trovò realmente varii integrali particolari, e che tali integrali si possono fare coincidere colle relazioni fra x e z da lui trovate in seguito atte a rendere integrabile la funzione X + Z.

Se adunque il Conte di Fagnano, o chiunque altro, avesse pensato a fare questo confronto fra la (16) e le (12), avrebbe compreso che le (12) erano probabilmente equivalenti alla (14) avendo integrali particolari comuni, e che per conseguenza il problema di rendere integrabile la funzione X + Z dipendeva essenzialmente dall'integrazione della (14), ed a questa avrebbe per conseguenza rivolto l'attenzione, tanto più che da questa equazione dipendono altresì molte proprietà della lemniscata ottenute dallo stesso Conte di Fagnano per mezzo dei suddetti integrali particolari e di varii altri integrali particolari delle equazioni

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}=0\,,\qquad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}=0$$

§ IV. — *Per qual via sia giunto l'Euler ed altri dopo lui all'integrazione dell'equazione* (14)

Nè anche l'Euler pare abbia avuta occasione di fare il detto confronto, giacchè egli desiderando approfondire le suddette proprietà della lemniscata messe in luce dal Conte di Fagnano partì dall'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}=0\,,$$

e tentando d'integrar questa riuscì per « une espèce de hazard heureux », come dice il Lagrange (*), ad avere l'integrale completo anche della (14). Questa in-

(*) « Cette intégration est d'autant plus remarquable qu'elle » n'est due qu'à une espèce de hazard heureux. »

(Miscellanea Taurinensia, Tomus quartus, pag 144, numero 103, lin 8—9 — Oeuvres, t. ii)

tegrale fu dato dall'Eulero in una sua memoria stampata nel 1761 (*), nella quale si legge (**)

« Notatu tamen minus observatu[illegible]
« sola tentamina de aequatione differentiali

$$\frac{mdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

« etiam integrale completum quod a illam quantitatem
« constantem arbitrariam involvat, semper algebraice ex-
« primi posse, [illegible]
« [illegible]
« quod nullo certo methodo [illegible]
« [illegible] »

[illegible] NOVI COMMENTARII ACADEMIAE [illegible] [illegible] (pag. 10 lin. 10—11)

(*) Questa memoria trovasi nel volume intitolato « NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIEN- « TIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE TOM. VI [illegible] MDCCLXI [illegible] » (pag. 37 lin. 7—23, pag. 38—58) nel qual volume (pag. 37 lin. 1—6) la memoria stessa ha il titolo seguente « DE INTEGRATIONE « AEQUATIONIS DIFFERENTIALIS $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ Auctore L. EULERO ». — La disposizione delle memorie dell'Eulero nel volume stesso [illegible] giacchè questa memoria precede l'altra contenuta nelle pagine 58 (lin. 7—23) 59—74 del medesimo volume, ed intitolata (NOVI COMMENTARII, ecc. TOM. VI, pag. 58, lin. 1—6) « OBSERVATIONES DE COMPARATIONE ARCUUM CURVARUM IR- « RECTIFICABILIUM. Auctore L. EULERO », [illegible] dallo « Scholion 2 » di quest'ultima (NOVI COM- MENTARII, ecc. TOM. VI, [illegible] pag. 81, lin. 21—25, pag. 82—84) alcuno apparisce che la memoria stessa fu composta anteriormente alla prima. A far conoscere come ciò possa essere accaduto gioverà riportare qui il seguente [illegible] (COMPTES RENDUS [illegible] 1856 [illegible] TOME XLII, pag. 32, lin. 26—40, pag. 33, lin. 1—5 [illegible])

« [illegible]
« [illegible]
« [illegible] »

Il Barone Giovanni Plana in un Post Scriptum ad una sua memoria sulla teorica delle trascendenti ellittiche avverte [illegible] che la detta [illegible] intitolata « DE INTEGRATIONE ecc. » debba essere considerata come una specie di continuazione dell'altra [illegible] memoria intitolata « OBSERVATIONES [illegible] » (MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. SERIE SECONDA. TOMO XX. TORINO, DALLA STAMPERIA REALE, MDCCCLXIII, pag. 294, lin. 14—20) — [illegible] THÉORIE DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES [illegible] TURIN [illegible] 1860, pag. 105, lin. 19—21)

(**) NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE, TOM. VI, ecc., pag. 40, lin. 3—11.

Digitized by Google

La divinazione della quale parla l'Euler in questo passo del suo scritto testè citato (*), non dovè essere laboriosa, giacchè avendo a disposizione i seguenti integrali particolari del conte di Fagnano, cioè

$$x^2 + z^2 + x^2z^2 = 1\,, \qquad x^2 + z^2 - x^2z^2 + 2xz\sqrt{2} = 1$$

appartenenti rispettivamente alle equazioni

$$(17)\qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 0\,, \qquad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = 0 \text{ (**)},$$

era ben naturale che provasse se differenziando l'equazione

$$(18)\qquad x^2 + z^2 + Ax^2z^2 - 2Bxz - C = 0,$$

riguardando A, B, C come indeterminate, potevasi giungere ad una delle predette equazioni differenziali lasciando arbitraria una delle dette costanti. Ora differenziando la (18) si ha

$$(19)\qquad (x + Axz^2 - Bz)dx + (z + Azx^2 - Bx)dz = 0,$$

e risolvendola si ha

$$x = \frac{Bz \pm \sqrt{B^2z^2 - (C - z^2)(1 + Az^2)}}{1 + Az^2}\,, \qquad z = \frac{Bx \pm \sqrt{B^2x^2 - (C - x^2)(1 + Ax^2)}}{1 + Ax^2},$$

ossia

$$x + Axz^2 - Bz = \pm\sqrt{B^2z^2 - (C - z^2)(1 + Az^2)}$$

$$z + Azx^2 - Bx = \pm\sqrt{B^2x^2 - (C - x^2)(1 + Ax^2)}$$

Sostituendo adunque nella (19) in vece delle quantità

$$x + Axz^2 - Bz\,, \qquad z + Azx^2 - Bx$$

i loro valori

$$\sqrt{B^2z^2 - (C - z^2)(1 + Az^2)}\,, \qquad \sqrt{B^2x^2 - (C - x^2)(1 + Ax^2)},$$

e dividendo quindi l'equazione che così si otterrà per prodotto di questi due radicali si ha

$$(20)\qquad \frac{dx}{\sqrt{-Ax^4 - (1 + AC - B^2)x^2 - C}} + \frac{dz}{\sqrt{-Az^4 - (1 + AC - B^2)z^2 - C}} = 0 \text{ (***)}$$

(*) Il Barone Plana avverte che questa divinazione fu fatta tra il 1756 ed il 1757, e probabilmente poco tempo dopo che l'Euler ebbe composto il precitato Scholium 4 dal suo scritto intitolato « OBSERVATIONES DE ecc. (MEMORIE | DELLA | REALE ACCADEMIA | DELLE SCIENZE || DI TORINO || SERIE SECONDA | TOMO XX, pag. 212, lin. 11—14 — MEMOIRE | SUR | LA THEORIE DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES | PAR JEAN PLANA, ecc., pag. 137, lin. 11—15).

(**) GIORNALE | DE' LETTERATI || D'ITALIA TOMO VENTESIMO NONO || ANNO MDCCXVIII || SOTTO LA PROTEZIONE | DEL SERENISSIMO | GIO. GASTONE | PRINCIPE DI TOSCANA | IN VENEZIA, MDCCXVIII | Appresso Gio. Gabbriello Hertz, ecc., pag. 266, lin. 16—19, pag. 267, lin. 1—5 — GIORNALE | DE' LETTERATI D'ITALIA | TOMO TRENTESIMO TERZO | Parte Seconda || ANNI MDCCXIX. MDCCXX || SOTTO LA PROTEZIONE DEL SERENISSIMO | GIO. GASTONE || PRINCIPE DI TOSCANA | IN VENEZIA, MDCCXXII | Appresso Gio. Gabbriello Hertz, ecc., pag. 149, lin. 3—21, pag. 153, lin. 1—17, pag. 154, lin. 13—23, pag. 155, lin. 1—10 — PRODUZIONI MATEMATICHE, ecc. TOMO SECONDO ecc., pag. 347, lin. 1—5, pag. 369, lin. 11—25, pag. 370, lin. 1—8, pag. 371, lin. 10—20.

(***) La dimostrazione che la (18) è un integrale di questa equazione non ha bisogno di spiegazione

Ora è chiaro che per passare da questa non solo ad una delle (17), ma anche alla (14), due sono le condizioni alle quali debbono soddisfare le *tre* indeterminate A, B, C, e quindi una da queste rimane arbitraria.

Ponendo

$$\frac{1-AC-B^2}{A}=\frac{g}{f}+\frac{l}{h},\qquad \frac{C}{A}=\frac{gl}{fh}$$

si ottiene la

$$(14)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(fx^2+g)(hx^2+l)}}+\frac{dz}{\sqrt{(fz^2+g)(hz^2+l)}}=0,$$

il cui integrale per conseguenza, lasciando arbitraria la A, sarà

$$Afhx^2z^2-fh(x^2-z^2)+2xz\sqrt{fh(f-gA)(h-lA)}+Agl=0$$

ovvero, ponendo $Agl=-fhk^2$,

$$(II)\qquad fhx^2z^2k^2-gl(x^2+z^2-k^2)+2xz\sqrt{gl(fk^2+g)(hk^2+l)}=0$$

Da questo si possono ricavare i tre integrali particolari (14), facendo successivamente

$$k^2=-\frac{g}{f},\quad k^2=-\frac{l}{h},\quad k^2=\infty$$

È veramente singolare che al sottile ingegno del Conte di Fagnano, il quale aveva dato gli elementi per simile integrazione, sia potuta sfuggire un metodo così ovvio! Sembra in fatti assai più difficile l'indovinare i diversi integrali particolari del Conte di Fagnano che passare da questi all'integrale generale.

Trovato questo integrale, il passaggio al teorema dell'addizione degli integrali ellittici di seconda specie, che comprende quello più particolare del Conte di Fagnano, era ben facile, anche per chi fosse stato inferiore all'Euler, giacchè, avendo alle mani gl'integrali che avea egli spesso scritto, la semplice osservazione ch'essi si de-

---

alcuna quando si sappia che la derivata di un'equazione di secondo grado è eguale alla radice del suo discriminante. Nello stesso genere si può dimostrare che se alla forma F(x, z) ... superiore il secondo grado F(x, z) = 0 è un integrale dell'equazione differenziale

$$(c)\qquad \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}\pm\frac{dz}{\sqrt{Z(z)}}=0$$

indicando con X(x), Z(z) i due discriminanti della forma F considerata come una funzione di 2° grado rispettivamente di z e di x: il che costituisce un teorema attribuito da alcuni al Jacobi, da altri al Lagrange. Si può però osservare che questo teorema, sebbene sembri più generale di quello dato dall'Euler, non è che un corollario di questo, giacchè è evidente che dalla (II) che ha tre costanti indipendenti si può passare alla F che ne ha 8 per mezzo di opportune sostituzioni lineari, vale a dire sostituendo ad x $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha_1 x+\beta_1}$, a z $\frac{\gamma z+\delta}{\gamma_1 z+\delta_1}$. Tali sostituzioni, quando abbiano lo stesso modulo, trasformano la (I) nella (c) ... con ciò avremo anche dimostrato il Teorema enunciato dal Prof. Cremona che cioè riguardando X(x), Z(z) come due forme biquadratiche le due forme hanno eguali invarianti: teorema da lui dimostrato colla solita eleganza per mezzo di considerazioni geometriche (vedi R. ISTITUTO LOMBARDO ‖ DI SCIENZE E LETTERE ‖ RENDICONTI ‖ CLASSE DI SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI ‖ VOLUME IV ‖ MILANO ‖ TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI ‖ 1867 pag. 207 lin. 8—15 ADUNANZA DEL 27 GIUGNO 1867)

Digitized by Google

ducevano dal suo integrale completo per mezzo di valori speciali della costante arbitraria, doveva *necessariamente* dergli certezza che per passare al detto teorema bastava il trasformare le (18) in un'altra, il cui primo membro fosse X+Z. Ciò l'Euler fece maestrevolmente in una memoria inserita nel volume intitolato « NOVI ‖ COMMENTARII ‖ ACADEMIAE SCIENTIARVM ‖ IMPERIALIS ‖ PETROPOLITANAE ‖ TOM. VII ‖ pro Annis MDCCLVIII et MDCCLIX ‖ *PETROPOLI* ‖ TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM ‖ MDCCLXI » (pag. 52, lin. 5–25, pag. 84–127) (*). Ritenendo le precedenti notazioni la trasformazione medesima si riduce a

$$(20)\qquad X+Z=-\frac{h}{\sqrt{gl}}\quad k\,d.xz$$

Tale fu la successione chiara e luminosa delle idee dell'Euler, derivata esclusivamente dalle scoperte del Conte di Fagnano, e che divenne il fondamento della teorica delle funzioni ellittiche.

L'integrale (21), fu poi nel 1768 dal Lagrange direttamente scoperto, partendo immediatamente dall'equazione differenziale, e pubblicato in una sua memoria stampata nel volume intitolato (**) « MISCELLANEA TAURINENSIA ‖ TOMUS QUARTUS » (pag. 98, lin. 7–25, pag. 99–126) (***), il che fu cagione all'Euler di alta maraviglia (****).

(*) Questa memoria è intitolata nel volume stesso (pag. 52, lin. 1–8) « [illegible] ‖ [illegible] ‖ [illegible] ‖ Auctore ‖ *L. EVLERO* ». Nel volume stesso (pag. 3, lin. 6–24, pag. 4–48) trovasi un'altra memoria dell'Euler intitolata « NOVI ‖ COMMENTARII ‖ ACADEMIAE SCIENTIARVM ‖ IMPERIALIS ‖ PETROPOLITANAE ‖ TOM. VII ... pag. 3, lin. 1–8 ‖ SPECIMEN ‖ [illegible] ‖ METHODI NOVAE ‖ [illegible] ‖ [illegible] ‖ Auctore ‖ *L. EVLERO* ». La seconda di queste due memorie, benchè stampata in questo volume antecedentemente alla prima, evidentemente fu composta in tempo posteriore ad essa.

(**) Questo titolo trovasi nella prima pagina del volume stesso. Nella terza pagina del medesimo volume si legge il titolo seguente « MÉLANGES ‖ DE ‖ PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE ‖ DE LA ‖ SOCIÉTÉ ROYALE ‖ DE TURIN ‖ POUR LES ANNÉES 1766–1769 ‖ *A TURIN* ‖ DE L'IMPRIMERIE ROYALE ‖ AVEC PERMISSION ».

(***) Questa memoria che nel medesimo volume (pag. 241, numerata 103, lin. 31) ha la data seguente « *A Berlin ce 20 Septembre 1768* », è intitolata nel volume stesso (pag. 98, lin. 1–6) « SUR L'INTÉGRATION ‖ *De quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable* ‖ Par M. DE LA GRANGE ». La memoria stessa è ristampata nel volume intitolato « ŒUVRES ‖ DE LAGRANGE ‖ PUBLIÉES PAR LES SOINS DE M. J.-A. SERRET ... TOME DEUXIÈME » ecc. (pag. 5, lin. 7–22, pag. 6–33).

(****) L'Euler espresse questa maraviglia in una sua memoria stampata nel volume intitolato « ACTA ‖ ACADEMIAE SCIENTIARUM ‖ IMPERIALIS PETROPOLITANAE ‖ pro Anno MDCCLXXVIII PARS PRIOR ‖ PETROPOLI ‖ TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM ‖ MDCCLXXXI » (pag. 20, lin. 9–33, pag. 21–67). In questa memoria si legge (*ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE* ‖ pro Anno MDCCLXXVIII ‖ PARS PRIOR, ecc., pag. 66, lin. 16–22):

« Postquam diu et multum in perpetranda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ desudassem, atque imprimis in methodum inquirens quae ad istud ne plane ad quod integrale perducerent, nunquam existimassem posse, ubi eiusmodi ... conclusum. Tum ... Illustris de la Grange ... methodum ... quae ... si ...

$X=A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4$

$Y=A+By+Cyy+Dy^3+Ey^4$

pro qua aequatione differentiali hoc integrale algebraicum atque adeo completum invenit:

$$\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{x-y}=\sqrt{\Delta+D(x+y)+E(x+y)^2}$$

ubi Δ denotat quantitatem constantem arbitrariam per integrationem ingressam. »

Questo integrale è stato poi nei nostri tempi trovato dal Sig. Despeyrous (*) per via diversa, e forse più diretta ancora di quella tenuta dal Lagrange per mezzo d'una integrazione per parti, come già fece il Lagrange stesso nella memoria sopraccitata per l'equazione $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}=0$, e prima di lui Giovanni Bernoulli in una lettera indirizzata al celebre Goffredo Guglielmo Barone di Leibniz, in data di « Basileæ d. $\frac{1}{11}$ Junii 1698 » (**)

Ma siamo già lungi dal Conte di Fagnano, e conviene tornare al suo teorema. Chi desiderasse conoscere il successivo sviluppo storico della teorica delle funzioni ellittiche, lo troverà nel volume intitolato « TEORICA DELLE FUNZIONI ‖ DI VARIABILI COMPLESSE ‖ ESPOSTA DAL ‖ DOTT. FELICE CASORATI ‖ PROF. DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA ‖ VOLUME PRIMO ‖ PAVIA ‖ TIPOGRAFIA DEI FRATELLI FUSI ‖ 1868. » (pag. 1–143). Chi volesse poi conoscere a quali precedenti lavori si colleghino le scoperte del Conte di Fagnano potrà anche leggere le pagine 52–88 del precitato volume intitolato « NOVI ‖ COMMENTARII ‖ ACADEMIAE SCIENTIARVM ‖ IMPERIALIS ‖ PETROPOLITANAE ‖ TOM. VI. » ecc.

§ V. – *Vari modi coi quali fu enunciato e dimostrato il Teorema del Conte di Fagnano* (***)

Questo teorema, o per dir meglio, la parte del Teorema stesso che si riferisce

---

Questa memoria dell'Eulero è intitolata nel volume stesso (pag. 26, lin. 1–8) « OBSERVATIONES ‖ SPECIMEN NOVAE METHODI ... ‖ ... ‖ DE INTEGRATIONE AEQUATIONIS DIFFERENTIALIS $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ ‖ Auctore ‖ L. EVLERO. »

(*) COMPTES RENDUS ‖ HEBDOMADAIRES ‖ DES SÉANCES ‖ DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, ecc. TOME QUARANTE-DEUXIÈME ‖ JANVIER–JUIN 1856 ‖ PARIS, ‖ MALLET-BACHELIER, ecc. 1856, pag. 990, lin. 11–25, pag. 991, lin. 1–20, N.° 21 (SÉANCE DU LUNDI 26 MAI 1856), pag. 1037, lin. 19–28, pag. 1038, lin. 1–12, N.° 22 (SÉANCE DU LUNDI 2 JUIN 1856). — JOURNAL ‖ DE ‖ MATHÉMATIQUES ‖ PURES ET APPLIQUÉES ‖ OU ‖ RECUEIL MENSUEL ‖ DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES, ecc. Publié ‖ PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME I.er — ANNÉE 1856 ‖ PARIS, ‖ MALLET-BACHELIER, ecc. 1856, pag. 232, lin. 11–22, pag. 233, lin. 1–10. — COURS ‖ D'ANALYSE ‖ DE ‖ L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ‖ PAR M. STURM ‖ Membre de l'Institut, ‖ PUBLIÉ D'APRÈS LE VŒU DE L'AUTEUR ‖ PAR M. E. PROUHET ‖ Professeur de Mathématiques ‖ TOME SECOND ‖ PARIS, ‖ MALLET-BACHELIER, ecc. 1859, pag. 330, lin. 27–29, pag. 331, pag. 332, lin. 1–16, NOTE III. — COURS ‖ D'ANALYSE ‖ DE ‖ L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ‖ PAR M. STURM ‖ Membre de l'Institut, ecc. NOUVELLE ÉDITION, ecc. TOME SECOND, ecc. PARIS ‖ GAUTHIER-VILLARS, ecc. 1864, pag. 329, lin. 31–35, pag. 330, pag. 331, lin. 1–3, NOTE II.

(**) VIRORUM CELEBERR. ‖ GOT. GUL. LEIBNITII ‖ ET ‖ JOHAN. BERNOULLII ‖ COMMERCIUM ‖ PHILOSOPHICUM ‖ ET ‖ MATHEMATICUM ‖ TOMUS PRIMUS ‖ Ab Anno 1694 ad Annum 1699. ‖ LAUSANNÆ & GENEVÆ, ‖ Sumpt. Marci-Michaelis Bousquet & Socior. ‖ MDCCXLV, pag. 59, lin. 19–35, pag. 60, lin. 1–17, EPISTOLA XI. — Leibnizens ‖ mathematische Schriften ‖ herausgegeben ‖ von ‖ C. I. Gerhardt ‖ Erste Abtheilung, ‖ Band III. ‖ Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli ‖ HALLE, ‖ Druck und Verlag von H. W. Schmidt ‖ 1855, pag. 185, lin. 20–28, pag. 186, lin. 1–33, BRIEFWECHSEL zwischen ‖ Leibniz ‖ und ‖ Johann Bernoulli, XI.

(***) La maggior parte delle notizie che seguono mi sono state gentilmente comunicate da D. B. Boncompagni, e dal ch.° Sig. Professore Angelo Genocchi.

by Google

all'ellisse, è citato da molti autori, e da quasi tutti quei che hanno trattato della teorica dei trascendenti ellittici, deducendolo come caso particolare del Teorema dell'addizione degli integrali ellittici di seconda specie.

Si è mostrato di sopra (pag. 4, lin. 7–13) che se ne' valori di X e Z pongasi

$$l=2\,,\quad f=-2\,,\quad g=2\,,\quad h=-2(1-b^2)$$

$\int X$ ed $\int Z$ rappresentano due archi d'una ellisse, il cui semiasse maggiore $a=1$, ed il suo semiasse minore $b=b$.

Se inoltre si pone

$$x=\operatorname{sen}\varphi\,,\quad z=\operatorname{sen}\psi\,,\quad k=\operatorname{sen}\mu\,,\quad h=-c^2$$

φ, ψ, μ saranno ciò che il Legendre ha chiamato le *amplitudini* corrispondenti alle ascisse x, z, k della stessa ellisse, e c ne sarà il *modulo*, ossia l'eccentricità, e con tali sostituzioni la (21) integrata diviene

$$\int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi}+\int_0^{\psi} d\psi\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\psi}=\int_0^{\mu} d\mu\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\mu}+c^2\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi,$$

ovvero adottando le notazioni dello stesso Legendre

$$\text{(23)}\qquad \mathrm{E}(\varphi)+\mathrm{E}(\psi)=\mathrm{E}(\mu)+c^2\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi$$

E sotto questa forma, che si suole comunemente presentare il teorema dell'addizione degl'integrali ellittici di seconda specie.

Le amplitudini φ, ψ, μ sono legate dall'equazione equivalente alla (a)

$$\text{(24)}\qquad \cos\varphi\cos\psi-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\mu}-\cos\mu=0\qquad (^*)$$

Se ora si fa $\mu=\frac{\pi}{2}$, si avrà

$$\mathrm{E}(\varphi)+\mathrm{E}(\psi)-\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}\right)=c^2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi$$

ove $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rappresenterà un quadrante della data ellisse, e la relazione fra φ e ψ diverrà

$$\text{(25)}\qquad \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{1}{b}$$

Adriano Maria Legendre scrive (**):

« Si, d'après cette relation entre les amplitudes φ et ψ, on détermine sur l'ellipse les arcs $\mathrm{BM}=\mathrm{E}(\varphi)$, $\mathrm{BN}=\mathrm{E}(\psi)$, on aura

$$\mathrm{BM}-\mathrm{AN}=c^2\sin\varphi\sin\psi$$

» C'est dans cette équation que consiste le théorème de Fagnani. »

(*) Le amplitudini φ, ψ, μ rappresentano evidentemente gli angoli di un triangolo sferico, e come nell'equazione

$$\cos\varphi\cos\psi-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi+\cos\mu=0$$

fondamentale delle funzioni circolari le stesse quantità rappresentano gli angoli di un triangolo rettilineo.

(**) [illegible]

Il teorema stesso è dimostrato in egual modo dal Legendre in una memoria stampata nel 1786 (*). In questa memoria si legge (**):

« Le théorème du comte Fagnani concernant les arcs
« d'ellipse dont la différence est égale à une ligne droite
« peut s'exprimer ainsi dans notre notation
« Soient deux angles φ & ψ, tels que $1 = b$ tang φ
« tang ψ, on aura en général

$$F(c, \varphi) + E(c, \psi) = E1 + \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} \text{ »}$$

È superfluo dimostrare come l'ultimo termine di questa equazione è identico con $c^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$ in virtù della (25).

In egual modo lo stesso teorema è dimostrato in un articolo relativo alle funzioni ellittiche del Supplemento pubblicato dal Sig. Professore Giovanni Augusto Grunert al Dizionario delle matematiche pure del Klügel, leggendosi in questo articolo (***):

« D nun nach (25) $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Länge des elliptischen Quadranten ist, und die Bogen $E\varphi$, $E\psi$ von dem Endpunkte der kleinen Axe an gerechnet werden, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung unmittelbar das folgende merkwürdige zuerst von Fagnani im Jahre 1716 gefundene Theorem:
« Wenn b tang φ tang $\psi = 1$ ist, so lassen sich auf dem elliptischen Quadranten von dem Endpunkte der kleinen und der grossen Axe an immer zwei Bogen der Ellipse abschneiden, deren Differenz die algebraische Grösse $k^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$ ist. »

(*) [illegible] Par A. M. LEGENDRE etc. Paris, Mme Ve COURCIER, imprimeur-libraire pour les mathématiques, 1811, pag. 44, lin. 10—13. — Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique. Par A. M. Legendre etc. Tome premier. Paris, imprimerie de Huzard-Courcier, rue du Jardinet, no 12, 1825, pag. 45, lin. 65—66.

(**) Questa memoria è stampata nel volume intitolato: Histoire de l'Académie royale des sciences. Année M. DCCLXXXVI. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie. A Paris, de l'Imprimerie royale. M. DCCLXXXVIII (pag. 644, lin. 6—30, pag. 645—673). Nel volume stesso pag. 644, lin. 1—8, questa memoria ha il titolo seguente: Second Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse, et sur la comparaison de ces arcs; Par M. Le Gendre.

(***) Histoire de l'Académie royale des sciences, Année M. DCCLXXXVI, Avec les Mémoires etc., pag. 615, lin. 24—31. — Nelle dette memorie nel titolo « Second Mémoire » etc. il Legendre fa una bella applicazione del teorema del Conte di Fagnano allo sviluppo in serie convergente di un arco di ellisse grande eccentricità (Histoire de l'Académie royale des sciences. Année M. DCCLXXXVI. Avec les Mémoires de Mathématique etc., pag. 620, lin. 16—31, pag. 621—624, pag. 625, lin. 1—14). Giovanni Brinkley cita questa applicazione scrivendo (The Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. IX. Dublin. Printed by George Bonham, printer to the Royal Irish Academy. 1803, pag. 163, lin. 18—23):

« This series is given by Legendre, and is derived by him from an application of the remarkable and elegant theorem discovered by Count Fagnani. The method Legendre used to obtain this series and its law are strikingly ingenious, and probably will not admit of improvement. For the method and law of the series I refer to his memoir. »

(*) Hist. Acad. 1786.

(****) Supplemente zu Georg Simon Klügel's Wörterbuche der reinen Mathematik. Herausgegeben von Johann August Grunert, etc. Zweite Abtheilung. E bis Z. etc. Leipzig 1836. Bei E. W. Schwickert, pag. 139, lin. 31—33.

in questo passo dell'articolo medesimo è asserito erroneamente, che il teorema del Conte di Fagnano fu trovato nel 1715, essendosi provato di sopra (pag. 2, col. 1ª–2ª e nota (*)) che questo teorema fu pubblicato nel 1715.

Guglielmo Wallace in un suo scritto inserito nel volume intitolato « TRANSACTIONS ‖ OF THE ‖ ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH ‖ VOL. V. ‖ EDINBURGH, ecc. 1805 » (pag. 241, lin. 3–25, pag. 278–280) (**) dedusse il teorema del Conte di Fagnano da una espressione dell'arco dell'ellisse. In questo scritto egli avverte che se si ponga

$$e_1 = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}, \quad e_2 = \frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{1+\sqrt{1-e_1^2}}, \quad \ldots, \quad e_n = \frac{1-\sqrt{1-e_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-e_{n-1}^2}},$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{(1+e_1)\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}, \quad \operatorname{sen}4\varphi_1 = \frac{\operatorname{sen}2\varphi_1}{(1+e_2)\sqrt{1-e_1^2\operatorname{sen}^2 2\varphi_1}}, \quad \ldots$$

$$\operatorname{sen}2^n\varphi_n = \frac{\operatorname{sen}2^n\varphi_{n-1}}{(1+e_n)\sqrt{1-e_{n-1}^2\operatorname{sen}^2 2^{n-1}\varphi_{n-1}}},$$

e sia z un arco dell'ellisse contato dall'estremo dell'asse minore, φ l'amplitudine corrispondente a quest'arco, E un quadrante della medesima ellisse, e la sua eccentricità, θ è il limite cui tende φ_n per $n = \infty$, si avrà

$$R = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e e_1 e_2 \ldots e_{n-1}(1+e_1)(1+e_2)\ldots(1+e_n)}{2^{2n}} \operatorname{sen}2^n\varphi_n$$

$$z = \frac{2\theta}{\pi} E + eR \quad (***)$$

Parlando quindi d'alcune applicazioni che si possono fare di queste formole egli dice (****)

(*) Il Barone Giovanni Federico Teodoro Maurice in una sua memoria intorno ai lavori ed agli scritti del Legendre all'Ecole... che i teoremi notevoli del Fagnano intorno alle funzioni ellittiche furono pubblicati nel giornale italiano del 1716 e negli anni seguenti (BIBLIOTHÈQUE ‖ UNIVERSELLE ‖ des ‖ SCIENCES, BELLES-LETTRES ET ARTS ‖ RÉDIGÉE A GENÈVE ‖ FAISANT SUITE A LA BIBLIOTHÈQUE BRITANNIQUE ‖ ... ‖ SCIENCES ET ARTS. — TOME LII ‖ GENÈVE ‖ IMPRIMERIE DE LA BIBLIOTHÈQUE UNIVERSELLE ... 1833, pag. 50, lin. 17–18, 26–27, Janvier et Février 1833). Non dice poi altro quale fosse questo teorema nè quale giornale.

(**) Questo scritto è pubblicato nel volume stesso (pag. 271, lin. 1–9) « APPENDIX, containing the Investigation of a Formula for the Rectification of any Arch of an Ellipse ». La memoria alla quale questo scritto serve di appendice è intitolata nel medesimo volume (pag. 251, lin. 1–2) « XI. A NEW METHOD of expressing the COEFFICIENTS of ‖ the DEVELOPEMENT of the ALGEBRAIC FORMULA $(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^n$ by means of the Perimeters of two ‖ Ellipses when n denotes the Half of any Odd Number; together with an APPENDIX, containing the INVESTIGATION of a FORMULA for the RECTIFICATION of any ARCH ‖ of an ELLIPSE. By Mr WILLIAM WALLACE Assistant ‖ Teacher of the Mathematics in the Academy of Perth. ‖ Read Jan. 11. 1802 ».

(***) TRANSACTIONS ‖ OF THE ‖ ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH ‖ VOL. V. ecc., pag. 279, lin. 9–27, pag. 280, lin. 1–18.

(****) TRANSACTIONS ‖ OF THE ‖ ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, ecc. VOL. V., ecc., pag. 280, lin. 23–29, pag. 281, lin. 1–9.

« For example we may hence deduce
» that very remarkable property of the ellipse, which is common-
» ly known by name of Fagnani's theorem, namely, that an
» elliptic arch reckoned from the extremity of either axis being
» supposed given, another arch, reckoned from the extremity of
» the other axis, may be found by a geometrical construction
» such, that the difference of these arches shall be equal to a cer-
» tain assignable straight line. »

In fatti se z' è un altro arco al quale corrisponde l'amplitudine ψ, e pel quale si verifichi la condizione $\varphi_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$, si trova facilmente

$$\operatorname{sen}2\varphi_1 = + \operatorname{sen}2\psi_1 \,, \qquad \varphi_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}4\varphi_2 = - \operatorname{sen}4\psi_2 \,, \qquad \varphi_2 + \psi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}8\varphi_3 = - \operatorname{sen}8\psi_3 \qquad \varphi_3 + \psi_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2} \,, \quad (^*)$$

e per $n > 1$

$$\operatorname{sen}2^n\varphi_n = - \operatorname{sen}2^n\psi_n$$

quindi

$$z + z' = \frac{\theta + \theta'}{\frac{1}{2}\pi} E + e\,(R + R') = E + \frac{e^2(1 - e_1)\operatorname{sen}2\varphi_1}{2} = E + \frac{e^2}{2}\,\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

ossia

$$z - (E - z') = \frac{e^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \quad (^{**})$$

Finalmente dopo avere osservato che la condizione $\varphi_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$ equivale a $\operatorname{cot}\psi = \sqrt{1 - e^2}\,\operatorname{tang}\varphi$, il Wallace nel precitato suo scritto soggiunge (***)

« But if we denote the semi-conjugate
» axis of the ellipse by b we have $b = \frac{1 - e}{1 + e}$ (Art. 41); and there-
» fore $e = \frac{1 - b}{1 + b}$; so that we at last derive from our formula the
» following very remarkable theorem first observed by Count
» Fagnani.
» Let AD be a quadrant of an ellipse, of which the semi trans-
» verse axis = 1, and AK a quadrant of the circumscribing circ-
» le; let b = the semi conjugate axis, and e = the excentricity

(*) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. V, ecc. pag. 250, lin. 16—25, pag. 252 lin. 1—17.
(**) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. V, ecc. pag. 253 lin. 18—24.
(***) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. V, ecc. pag. 254 lin. 9—24.

Digitized by Google

» let ψ = AM, an arch of the circle reckoned from the extremi
» ty of the transverse, and φ = HK, an arch of the circle reckon
» ed from its intersection with the conjugate axis: draw ML and
» HG perpendicular to the transverse axis meeting the ellipse in
» N and F. Then, if the arches ψ and φ be such that tan ψ = cotang
» the difference of the elliptic arches AN – FD, is equal to

$$\frac{e^2 \sin \varphi \sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \text{ » } \quad (*)$$

Agostino Luigi Cauchy deduce il teorema del Conte di Fagnano dal differenziale di quest'ultima espressione (**)

Un arco d'ellisse, il cui semiasse maggiore sia a, e la cui eccentricità sia ε, è espresso da

$$s = a\int d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}$$

posto che sia $x = a\cos\varphi$. D'altra parte avendosi per una curva qualunque $s = \int \sec\tau\, dx$, τ essendo l'inclinazione sull'asse delle x della tangente ad un punto qualunque della curva, ne deriva che l'arco stesso d'ellisse sarà anche espresso da

$$s = a(1 - \varepsilon^2)\int \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2\cos^2\tau)^3}},$$

giacchè

$$x^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2\tau}{1 - \varepsilon^2\cos^2\tau}.$$

Da questa stessa equazione si deduce fra φ, e τ la relazione

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\tau}} \qquad (***)$$

Il Cauchy dopo avere stabilito questa relazione, soggiunge (****)

« Cela posé on aura

$$\text{»} \quad d\varphi \sqrt{\ldots} \cos\varphi \cos\tau = a\, d\left[\frac{\varepsilon^2 \cos\tau \sin\tau}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\tau}}\right] = -\sqrt{(1 - \varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau + \frac{(1 - \varepsilon^2)\,d\tau}{(1 - \varepsilon^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}$$

» et l'on en conclura

(*) La formola che il Wallace in questo passo del suo scritto testè citato dice « our formula » (Vedi supra, pag. 18 lin. 20) è la seguente riportata di sopra (pag. 17 lin. 15)

$$s = \frac{2\varrho}{\pi} E + sR$$

(**) LEÇONS | SUR | LES APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL | A LA GÉOMÉTRIE, || PAR M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, ecc. A PARIS | DE L'IMPRIMERIE ROYALE. | Chez de Bure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, | rue Serpente, n° 7. | 1826, pag. 23 lin. 3—23; pag. 24, lin. 1—19.

(***) È questa la formola (103) della pagina 23 del volume intitolato « LEÇONS | SUR | LES APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL | A LA GÉOMÉTRIE, | PAR M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY » ecc. TOME II » ecc.

(****) LEÇONS | SUR | LES APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL | A LA GÉOMÉTRIE, | PAR M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, ecc. TOME II, ecc., page 23, lin. 9—28, pag. 24, lin. 1—15.

$$(1-\varepsilon^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau$$

« Donc l'équation (101) pourra être ramenée à la forme

« (106) $$s = a\varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + a\int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau$$

« Cette dernière suppose, comme l'équation (101), $\tau > \tau_0$. Alors le produit

« $$a\int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau$$

« est évidemment positif, et représente, en vertu de la formule (89), l'arc « renfermé entre les points de l'ellipse qui ont pour abscisses les deux « quantités $a\cos\tau$, $a\cos\tau_0$. Donc, si l'on désigne cet arc par ς, on aura

« $$s = a\varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + \varsigma$$

« ou, ce qui revient au même,

« (107) $$s - \varsigma = a\varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) \quad (*)$$

« Si, pour plus de commodité, on appelle ξ et ξ_0 les abscisses de l'ex« trémité de l'arc ς, on aura simplement

« (108) $$s - \varsigma = \varepsilon^2\frac{x\xi - x_0\xi_0}{a}$$

« Ainsi l'on peut énoncer en termes finis la différence qui existe entre deux arcs « d'ellipse tellement choisis que les inclinaisons des tangentes menées par les deux « extrémités de l'un de ces arcs soient respectivement égales aux inclinaisons des « deux rayons vecteurs menés du centre de l'ellipse aux points où la circonférence « de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre est coupée par les ordon« nées qui renferment les extrémités du second arc.

« Lorsque on suppose $\tau_0 = 0$, on a évidemment $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, et $x_0 = 0$.

« Alors l'équation (108) se réduit à

« (109) $$s - \varsigma = \varepsilon^2\frac{x\xi}{a}$$

« et la proposition qu'elle renferme coïncide avec un théorème découvert « par un géomètre italien, le comte de Fagnano. »

Si può osservare che il Cauchy, poteva senza essere punto inesatto, attribuire al Conte di Fagnano la stessa (108) senza passare alla (109), giacchè tanto bene si deduce questa da quella, quanto quella da questa.

Il Sig. Professore Giovanni Augusto Grunert, in un suo scritto sul teorema del Conte di Fagnano stampato nel 1856 (**), dà una dimostrazione di questo teorema non diversa da quella testè recata dal Cauchy. In questo scritto è avvertito

(*) Per errore tipografico nella linea 4 della pagina 84 del volume intitolato « LEÇONS SUR LES « APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL À LA GÉOMÉTRIE | PAR M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, « ecc. TOME II, ecc. leggesi « $(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0)$ » in vece di « $(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0)$ ».

(**) Questo scritto trovasi nel secondo fascicolo (Zweites Heft) del volume intitolato « Archiv « der | Mathematik und Physik, | mit besonderer Rücksicht | auf die Bedürfnisse der Lehrer an | hö« heren | Unterrichtsanstalten | herausgegeben | von | Johann August Grunert | Sechsundzwanzigster « Theil, Greifswald | C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung | Th. Kunike | 1856 » pag. 195, lin. 5–40, pag. 196–203, pag. 204, lin. 1–10. Lo scritto medesimo è intitolato nel fascicolo stesso (pag. 195, lin. 1–4) « IX. Ueber ein Theorem von Fagnano. | Von | dem Herausgeber ».

Digitized by Google

primieramente che se le coordinate di un punto dell'ellisse siano $x = a\cos u$, $y = b\,\mathrm{sen}\,u$, un arco, i cui estremi siano determinati da u_0 ed u_1, è dato da

$$s_{0,1} = \int_{u_0}^{u_1} du\sqrt{a^2\mathrm{sen}\,u^2 + b^2\cos u^2}\ ,$$

ed un altro arco limitato da u'_0 ed u'_1, colle condizioni

$$\cot u'_0 = -\frac{a}{b}\,\mathrm{tang}\,u_0\ ,\qquad \cot u'_1 = -\frac{a}{b}\,\mathrm{tang}\,u_1$$

sarà espresso da

$$s'_{0,1} = a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{du}{(a^2\mathrm{sen}\,u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}\quad (*)$$

Quindi il Sig. Grunert soggiunge (**)

« Aus den beiden gefundenen Ausdrücken von $s_{0,1}$ und $s'_{0,1}$ erhält man

$$s_{0,1} - s'_{0,1} = \int_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2} - a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

« Durch Differentiation überzeugt man sich aber auf der Stelle von « der Richtigkeit der folgenden Gleichung

$$\partial\,\frac{(a^2 - b^2)\sin u\cos u}{\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2}} = \frac{(a^2 - b^2)(b^2\cos u^4 - a^2\sin u^4)}{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\partial u\ ,$$

« und folglich, weil

$$(a^2 - b^2)(b^2\cos u^4 - a^2\sin u^4) = a^2b^2 - (a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^2$$

« ist

$$\partial\,\frac{(a^2 - b^2)\sin u\cos u}{\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2}} = \frac{a^2b^2\,\partial u}{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}} - \partial u\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2}\ ,$$

« also, wenn man zwischen den Gränzen u_0 und u_1 integrirt

$$(a^2 - b^2)\left\{\frac{\sin u_1\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2 + b^2\cos u_1^2}} - \frac{\sin u_0\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2}}\right\}$$

$$= a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2}$$

« oder

$$(a^2 - b^2)\left\{\frac{\sin u_0\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2}} - \frac{\sin u_1\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2 + b^2\cos u_1^2}}\right\}$$

$$= \int_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2} - a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

« Vergleicht man dies nun mit dem Obigen, so erhält man die sehr « merkwürdige Gleichung

$$s_{0,1} - s'_{0,1} = (a^2 - b^2)\left\{\frac{\sin u_0\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2}} - \frac{\sin u_1\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2 + b^2\cos u_1^2}}\right\}\ ,$$

(*) Archiv der Mathematik und Physik ecc. Herausgegeben von *Johann August Grunert*. Sechsundzwanzigster Theil, ecc., pag. 199 lin. 14—20 pag. 200 pag. 190, lin. 1—15

(**) Archiv der Mathematik und Physik, ecc. Herausgegeben von *Johann August Grunert*. Sechsundzwanzigster Theil ecc., pag. 200 lin. 16—23; pag. 201 lin. 1—14

» welche in dieser Form früher noch nicht gegeben ist, aber nach
» meiner Meinung den bestimmtesten und allgemeinsten
» Ausdruck des Theorems von Fagnano enthält. Wie leicht man
» auf dem vorhergehenden Wege mit Hülfe der Analysis zu der-
» selben gelangt brauche ich wohl nicht noch besonders hervorzuheben »

Confrontando questa dimostrazione del Sig. Grunert con quella riportata di sopra del Cauchy, si scorge che ciascuna di queste due dimostrazioni è fondata sulla differenziazione della quantità

$$\frac{c^2\cos\tau\,\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{1-c^2\cos^2\tau}}$$

equivalente a

$$\frac{(a^2-b^2)\operatorname{sen}u\cos u}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2u+b^2\cos^2u}}$$

Il Sig. Grunert introducendo poscia le coordinate x ed y, trova varie espressioni della differenza dei due archi, fra le quali citerò questa, che sembra assai notabile:

$$s_{0,1}-s_{2,3}=\frac{a^2-b^2}{a^2}\left(\frac{x_0y_0}{N_0}-\frac{x_1y_1}{N_1}\right)\quad(*)$$

dove N_0, N_1 sono le normali ai punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

§ VI. – *Costruzioni e dimostrazioni geometriche del Teorema del Conte di Fagnano.*

Dal passo riportato di sopra del Cauchy risulta che questo illustre geometra oltre le formole che racchiudono il teorema del Conte di Fagnano, dà anche una costruzione geometrica degli archi dell'ellisse.

Altri autori nell'enunciare il teorema stesso determinano con una costruzione geometrica non solo gli archi dell'ellisse, ma anche la retta a cui la loro differenza è uguale.

Le costruzioni per altro di questa retta, riduconsi tutte, salvo una data dal Sig. Chasles, a quella contenuta nel seguente teorema stampato nel 1754 in un volume della celebre raccolta intitolata « NOVA ACTA ERUDITORUM », ecc. (**):

« *THEOREMA, AD CUJUS DEMONSTRATIONEM*
Geometrae invitantur.
» Si ellipsis *AEBF* radiis principalibus *AB* & *EF* descripta per
» ... utrumque ... obliquam *XY* bisettam ad quel...
» ... conjugata *CZ* producatur in *F*, ... *CF* aeque...

(*) Archiv der Mathematik und Physik ecc. Herausgegeben von Johann August Grunert. Sechsundzwanzigster Theil ecc., pag. 202, lin. 5.

(**) NOVA ACTA ERUDITORUM ANNO MDCCLIV publicata. Cum ... Regis Pol. atque Electoris Saxonici Privilegiis. LIPSIAE. Prostant apud ... GLEDITSCHII & ... LANCKISII haeredes ecc. pag. 43, lin. 1–17.

» bis semiaxi CA, & ex F ad CA normalis agatur FP, hoc illi
» pace ita secabit in puncto S ut circuum XAS & YFS diffe-
» rentia geometrice assignari possit.
» Si enim ex X ad CZ perpendiculum XQ ducatur, intercel-
» lum CQ bis sumtum, aequale erit illarum circuum differentiae,
» seu erit YFS — XAS = 2CQ ».

Benchè questo teorema non porti nome d'autore è probabilmente dovuto a Leonardo Euler. Lo stesso Euler in una delle sue memorie stampate nel 1761 (*), giovandosi dell'integrale particolare del Conte di Fagnano, dà due teoremi, il primo de' quali coincide in sostanza con quello testè riportato, ed il secondo risolve con somma eleganza anche il problema di dividere un quadrante dell'ellisse in due parti, la cui differenza sia rettificabile, differenza ch'è poi un massimo, ed è eguale alla differenza dei due semiassi. Il primo di questi due teoremi è dall'Euler enunciato così (**)

« Theorema 1

» 10. In quadrante elliptico ACB si ex puncto
» quolibet M ducatur tangens HMK quae cum altero axe
» CB in H concurrat, atque altero semiaxi CA aequalis
» capiatur HK = CA, tum vero per K axi CB
» parallela agatur KN ellipsin secans in N, erit arcuum BM
» et AN differentia BM — AN geometrice assignari po-
» terit. Demisso enim ex Centro C in tangentem per-
» pendiculo CT, erit ista arcuum differentia BM—AN=MT ».

Il secondo de' medesimi due teoremi è dall'Euler enunciato nel modo seguente (***)

« Theorema 2

» 11. Si super quadrante elliptico ACB altero se-
» miaxe CA triangulum aequilaterum CAE constituatur
» et in eius latere AE portio capiatur AF = CB, iun-
» ctaque CF nunc applicetur in ellipsi recta CO, pun-
» ctum O hanc habebit proprietatem, ut sit CA + arcu AO
» = CB + arcu BO ».

La dimostrazione semplicissima data dall'Euler di questi due teoremi fondasi quanto alla costruzione di N sul valore del rapporto della ordinata di M alla sua *normale*, e quanto alla costruzione della retta MT sul valore della sunnormale dello stesso punto. È da notare che dal primo di questi due teoremi deriva un'altra proprietà dei punti M ed N, che cioè le distanze delle rispettive normali dal centro sono eguali, giacchè la costruzione fatta dall'Euler sul punto M, potea farsi con identico risultamento sul punto N.

Il Sig. Pietro Francesco Verhulst, nel ben noto suo trattato delle funzioni el-

(*) Questa memoria è quella intitolata « OBSERVATIONES || DE COMPARATIONE || ARCUUM CURVARUM || IRRECTIFICABILIUM || Auctore || L. EULERO », e citata di sopra (pag. 10, lin. 22—25).

(**) NOVI || COMMENTARII || ACADEMIAE SCIENTIARUM || IMPERIALIS || PETROPOLITANAE || TOM. VI. || ad Annum MDCCLVI et MDCCLVII, ecc. MATHEMATICA, pag. 64, lin. 7—15.

(***) NOVI || COMMENTARII || ACADEMIAE SCIENTIARUM || IMPERIALIS || PETROPOLITANAE || TOM. VI. ecc. MATHEMATICA, pag. 64, lin. 19—25.

littiche, dopo aver trovata la condizione $b\ \mathrm{tang}\ \varphi\ \mathrm{tang}\ \psi = 1$ (*) alla quale deve soddisfare la (22), soggiunge (**):

« Une propriété remarquable du point N déterminé par suite de la
» construction de l'angle φ est que la différence des arcs BM et AN
» est égale à la partie de la tangente $\overline{GM}$ ou $\overline{ZN}$ interceptée entre le point de contact et la perpendi-
» culaire $\overline{CO}$ ou $\overline{CZ}$ abaissée du centre de l'ellipse. Ce théorème, dont la
» découverte est due à Fagnano, peut se démontrer de la manière
» suivante: »

Il teorema del quale il Sig. Verhulst in questo passo del suo trattato suddetto dice esser dovuta la scoperta al Fagnano, altro non è che la seconda parte del « Theorema I. » dell'Euler riportato di sopra (pag. 23, lin. 15–22). La dimostrazione che il Sig. Verhulst ne da (***) è molto più lunga di quelle datane dall'Euler. Enuncia quindi in modo alquanto diverso il teorema stesso scrivendo (****)

$$\text{« En remplaçant } AN \text{ par sa valeur } AB - BN \text{ on a simultanément}$$
$$\text{» } BM + BN = AB + \overline{MO}$$
$$\text{» } CF \times \overline{CG} = \overline{AC} \times \overline{CB}$$

» Il résulte de ces deux équations que le théorème de Fagnano
» peut s'énoncer de la manière suivante: si les arcs d'ellipse BM et
» BN sont tels que le rectangle des rayons vecteurs correspondants $\overline{CF}$ et
» $\overline{CG}$ équivaut à celui des demi-axes, les deux arcs valent en somme le
» quart de l'ellipse, plus la ligne $\overline{MO}$. »

Le dimostrazioni, che abbiamo esaminato di sopra, del Legendre, del Klugel e del Sig. Verhulst si confondono in una fondata sulla proprietà di un arco ellittico qualunque, messa in evidenza nell'equazione (23) di poter essere in infiniti modi spezzato in una quantità algebrica ed un altro arco ellittico. Quelle del Wallace, del Cauchy e del Sig. Gunnert poggiano su principii più particolari. Sarebbe, parmi, desiderabile generalizzare i due processi del Wallace e del Cauchy in guisa da mettere in evidenza la suddetta proprietà. Generalizzando il metodo del Cauchy converrebbesi più direttamente alla (1), ed introducendo nella serie del Wallace una costante arbitraria, la serie medesima verrebbe probabilmente ad acquistare delle proprietà non poco interessanti.

Oltre le suddette dimostrazioni analitiche, che son le sole ch'io conosca, due dimostrazioni puramente geometriche sono state date del teorema del Conte di Fagnano, delle quali una è dovuta a Giovanni Brinkley e l'altra al Sig. Paolo Serret. La prima di queste due dimostrazioni trovasi in una memoria letta dal detto

---

(*) TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE || DES || FONCTIONS ELLIPTIQUES || [illegible] || AUX TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL, || PAR || P. F. VERHULST, || DOCTEUR ÈS SCIENCES || [illegible] || BRUXELLES || 1841, pag. 70, lin. 6–18.

(**) TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE || DES || FONCTIONS ELLIPTIQUES, ecc. PAR || P. F. VERHULST, ecc., pag. 71, lin. 4–8.

(***) TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE || DES || FONCTIONS ELLIPTIQUES, ecc. PAR || P. F. VERHULST, ecc., pag. 71, lin. 10–33; pag. 72, lin. 1–18.

(****) TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE || DES || FONCTIONS ELLIPTIQUES, ecc. PAR || P. F. VERHULST, ecc., pag. 72, lin. 1–8.

Digitized by Google

Sig. Brinkley all'Accademia Reale d'Irlanda nel giorno 21 di Dicembre del 1802 (*) è fondata su di una proprietà dell'ellisse ch'egli enuncia così (**):

« Lemma.

» Let AED be a semi-ellipse on the axis major AD, C the centre
» and AFD the circumscribing circle. If also any ordinate GF be pro-
» duced to meet the circle in F. Draw FC intersecting the ellipse in
» O and QOP parallel to FG; then if QC be drawn intersecting the
» tangent EN in N, CN will be perpendicular to the tangent EN,
» and equal to CO. »

La costruzione che dà il Brinkley dei punti estremi degli archi è quella stessa del Cauchy, e quella della loro differenza è la stessa dell'Eulero.

Il Teorema del Conte di Fagnano è enunciato dal Sig. Paolo Serret nel seguente modo (***):

« 7. Théorème de Fagnano.

» La différence de deux arcs elliptiques AA', aa', dont les extrémités A
» et a, A' et a' forment deux couples de points associés, est égale à la diffé-
» rence des distances du centre de la courbe aux normales passant par les
» extrémités de l'un des deux arcs. » (****)

Egli dimostra quindi il teorema stesso considerando l'ellisse come generata da un punto A di una retta le cui estremità scorrano su due assi ortogonali, ed in pari tempo come una epicicloide raccorciata, descritta dal punto A invariabilmente legato ad una circonferenza che ruoti internamente sopra una circonferenza di raggio doppio della prima, ed avente per centro il punto d'incontro degli assi ortogonali (*****).

Le diverse costruzioni accennate variano quanto ai punti estremi dei due archi, ma quanto alla retta che rappresenta la loro differenza si riducono tutte a quella proposta da Eulero nel suo « Theorema 5 » riportato di sopra (pag. 23, lin. 15–23).

14. Il Sig. Chasles ha dato una costruzione per la quale dato un arco qualunque di un ellisse, se ne possono assegnare infiniti altri che differiscono dal primo di

(*) Questa memoria trovasi stampata nel volume intitolato « THE | TRANSACTIONS | OF THE | ROYAL IRISH ACADEMY | VOL. IX. » ecc. (pag. 145, lin. 9–19; pag. 146–155). La memoria stessa è intitolata in questo volume (pag. 145, lin. 1–8) « A THEOREM for finding the Surface of an OBLIQUE CYLINDER | with its Geometrical Demonstration. Also an Appendix, containing some | Observations on » the Methods of finding the Circumference of a very Excentric Ellipse; including a Geometrical » Demonstration of the remarkable Property of Elliptic Arcs discovered by Count Fagnani. By the » Rev. J. | BRINKLEY, A. M. M. R. I. A. Andrews Professor of Astronomy in | the University of » Dublin. | Read Dec. 20. 1802. »

(**) TRANSACTIONS | OF THE | ROYAL IRISH ACADEMY. | VOL. IX. ecc., pag. 151, lin. 11–17.

(***) DES | MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE | PAR PAUL SERRET, | PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES. | PARIS, | MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE | DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, | Quai des Augustins, 55. | 1855, pag. 139, lin. 12–16.

(****) I punti associati dell'ellisse menzionati in questo enunciato non possono evidentemente essere altri che due punti tali, che le normali condotte alla curva per questi punti distano egualmente dal centro, le distanze del centro a questi punti essendo ineguali.

(*****) DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE | PAR | PAUL SERRET, ecc., pag. 139, lin. 17–30; pag. 140.

una quantità geometricamente determinabile, e che si determina in un modo diverso da quello di Eulero. Tutto ciò è racchiuso nella seguente proposizione.

Se dagli estremi dell'arco proposto si tirano due tangenti, e sul loro incontro facciasi passare un'altra ellisse biconfocale all'ellisse data, da qualunque punto di quella tirinsi due tangenti a questa, esse comprenderanno un arco, che differirà dal primo di una quantità geometricamente assegnabile, che sarà la somma dei lati circoscritti al primo arco, meno la somma dei lati circoscritti al secondo arco (*).

Da questo teorema il Sig. Kupper ha dedotto vari altri teoremi relativi alle coniche, tra i quali citiamo il seguente (**).

« Théorème. *Lorsqu'à un triangle mixtiligne formé par deux tangentes d'une conique et l'arc compris entre elles, une circonférence est inscrite, le point de contact de la circonférence avec la conique partage l'arc de celle-ci en deux parties dont la différence est égale à la différence des deux tangentes.* »

Torino 21 maggio 1865

(*) COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PUBLIÉS CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE En date du 13 Juillet 1835, PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS. TOME DIX-NEUVIÈME. JUILLET-DÉCEMBRE 1844. PARIS, BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS, N° 55, 1844, pag. 848, lin. 13—19. N° 17. SÉANCE DU LUNDI 28 OCTOBRE 1844. — GÉOMÉTRIE. *Propriétés générales des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable*. Par M. CHASLES. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 28 octobre 1844, pag. 3, lin. 11—16. — Il Sig. Chasles ha trovato per l'ellisse sferica un teorema analogo al precedente (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, etc. TOME DIX-SEPTIÈME. JUILLET-DÉCEMBRE 1843, ecc., pag. 838, lin. 15—29. — GÉOMÉTRIE. *Propriétés générales des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable*. Par M. CHASLES. Extrait des *Comptes rendus*, ecc., pag. 8, lin. 12—45). A questo teorema fu anche condotto il Sig. Prof. Tortolini (GIORNALE ARCADICO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI, TOMO CIX, OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1846. ROMA, *Tipografia delle Belle Arti*, 1846, pag. 241, lin. 1—8. — SULLA RETTIFICAZIONE DELLE ELLISSI SFERICHE, ecc. MEMORIA DI BARNABA TORTOLINI, ecc. ROMA, TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI, 1846, pag. 13, lin. 1—8).

(**) Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass von C. W. Borchardt. Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden. Dreiundsechzigster Band. In vier Heften. Berlin, 1864. Druck und Verlag von Georg Reimer, pag. 47, lin. 24—25.

93 55 463

Digitized by Google